أستادانه

محتوای خوب از ما، نمره خوب برای شما

حل المسائل کتاب ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت جلد ۲ مسعود نیکوکار

فهرست مطالب

فصل اول بردارها

مجموعه مسائل ۱.۱:مختصات قائم در فضا

در هریک از تمرین های زیر فاصله نقاط داده شده را به دست آورید.

۱)A(۲,۱) , B(۴,۳)

با استفاده از فرمول $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ داریم:

$$|AB| = \sqrt{(2-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

۲)A(۳,۵) , B(۰,۱)

$$|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۳)A(۲,۱,۴) , O(۰,۰,۰)

$$|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

۴)A(-۱,۲,-۳), B(۷,۱,۶)

$$|AB| = \sqrt{(-1-7)^2 + (2-1)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{64+1+81} = \sqrt{146}$$

۵)مختصات نقطه Cوسط پاره خط ABکه(۲,۱,۴)A و(۰,۱,۲) B را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{2}(2+0) = 1 \\ y_c = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ z_c = \frac{1}{2}(4+2) = 3 \end{cases} \Rightarrow C = (1,1,3)$$

مجموعه مسائل ۲.۱:بردارها در فضای سه بعدی

در تمرین های ۱تا۳ بردار$\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\overrightarrow{b\imath}+\overrightarrow{b\jmath}+\overrightarrow{ck}$بنویسید.

۱)A(۲,۰,۱) B(۴,−۱,۲)

باتوجه به فرمول (۱) داریم$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(2,-1,1)$

و با توجه به فرمول (۲) داریم: $\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$

۲)$A(0,0,0)$ $B(1,-1,2)$

$$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(1,-1,2) => \overrightarrow{AB}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

۳)A(−۱,۲,۳) B(۴,۱,۲)

$$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(5,-1,-1) => \overrightarrow{AB}=5\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}$$

در تمرین های ۴و۵بردارهای $\vec{A}+3\vec{B}$, $\vec{A}-2\vec{B}$را پیدا کنید.

۴) $\vec{B}=2\vec{\imath}-\vec{k},\vec{A}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$

$$\vec{A}-2\vec{B}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}-2\left(2\vec{\imath}-\vec{k}\right)=-\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+3\vec{k}$$

$$\vec{A}+3\vec{B}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}+3\left(2\vec{\imath}-\vec{k}\right)=9\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-2\vec{k}$$

۵) $\vec{B}=2\vec{\imath}+7\vec{\jmath}-3\vec{k},\vec{A}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$

$$\vec{A}+3\vec{B}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}+3\left(2\vec{\imath}+7\vec{\jmath}-3\vec{k}\right)=5\vec{\imath}+22\vec{\jmath}-10\vec{k}$$

$$\vec{A}-2\vec{B}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}-2\left(2\vec{\imath}+7\vec{\jmath}-3\vec{k}\right)=-5\vec{\imath}-13\vec{\jmath}+5\vec{k}$$

۶)طول بردارهای زیر راپیدا کنید.

الف:$\vec{A}=4\vec{\imath}-3\vec{\jmath}$

$$|4\imath-3\jmath|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

ب:$\vec{B}=5\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$

$$|5\imath-\jmath+k|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

مجموعه مسائل ۳.۱:حاصل ضرب داخلی یا عددی

در تمرین های زیر زاویه بین بردارهای داده شده را معین کنید.

۱) $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$

$$\cos\theta = \frac{3\times1+2\times1+7\times5}{\sqrt{3^2+1^2+7^2}.\sqrt{1^2+2^2+5^2}} = \frac{40}{\sqrt{1770}} = 0.95$$

$$=> \theta = cos^{-1}0.95 = 18.05^\circ$$

۲) $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{B} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

$$\cos\theta = \frac{3\times2+(-3\times-1)+(0\times2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}.\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}.3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} => \theta = \frac{\pi}{4}$$

۳) $\vec{A} = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$$\cos\theta = \frac{2\times0-1\times1+(1\times-1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 0 => \theta = \frac{\pi}{2}$$

درتمرینهای ۴ تا ۶ نشان دهید که دو بردار داده شده بر هم عمود هستند .

۴) $\vec{A} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 13\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

کافی است نشان دهیم که $\vec{A}.\vec{B} = 0$ پس با توجه به

$\vec{A}.\vec{B} = 2\times3+1\times7+1\times-13 = 13-13 = 0$ در نتیجه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بر هم عمودند.

۵) $\vec{A} = 20\vec{i} + 29\vec{j} - 11\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{A}.\vec{B} = 2\times20+(-1\times29)+(-11\times-1) = 40-40 = 0$$

۶) $\vec{A} = 20\vec{i} + 29\vec{j} - 11\vec{k}$, $\vec{B} = 3\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}$

$$\vec{A}.\vec{B} = 3\times20+(-7\times29)+(-13\times-11) = -203-203 = 0$$

در تمرین های ۷تا۱۱ تصویر بردار $\vec{A}$ را روی $\vec{B}$ پیدا کنید.

۷) $\vec{A} = \vec{i}$, $\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$$Proj_B^A=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\vec{B}.\vec{B}}\,\vec{B}=\frac{2\times1+0+0}{2^2+(-1)^2+2^2}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k})$$

$$=\frac{2}{9}\left(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)=\frac{4}{9}\vec{\imath}-\frac{2}{9}\vec{\jmath}+\frac{4}{9}\vec{k}$$

۸) $\vec{A}=\vec{j}$, $\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

$$Proj_B^A=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}}\vec{B}=\frac{2\times0+(-1\times1)+2\times0}{2^2+(-1)^2+2^2}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k})$$

$$=-\frac{1}{9}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k})=-\frac{2}{9}\vec{\imath}+\frac{1}{9}\vec{\jmath}-\frac{2}{9}\vec{k}$$

۹) $\vec{A}=\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

$$Proj_B^A=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}}\vec{B}=\frac{2\times0+(-1\times0)+2\times1}{2^2+(-1)^2+2^2}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k})$$

$$=\frac{2}{9}\left(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)=\frac{4}{9}\vec{\imath}-\frac{2}{9}\vec{\jmath}+\frac{4}{9}\vec{k}$$

۱۰) $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

$$Proj_B^A=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}}\vec{B}=\frac{2\times1+(-1\times1)+2\times0}{2^2+(-1)^2+2^2}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k})$$

$$\frac{1}{9}\left(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)=\frac{2}{9}\vec{\imath}-\frac{1}{9}\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

۱۱) $\vec{A}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

$$Proj_B^A=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\vec{B}\cdot\vec{B}}\vec{B}=\frac{(2\times-1)+(-1\times2)+2\times3}{2^2+(-1)^2+2^2}(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k})$$

$$=\frac{2}{9}\left(2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)=\frac{4}{9}\vec{\imath}-\frac{2}{9}\vec{\jmath}+\frac{4}{9}\vec{k}$$

کسینوس های هادی و زوایای هادی بردار داده شده را بیابید.

۱۲) **۲i −۶j +۹k**

$$\cos\theta_1=\frac{2}{|a|}=\frac{2}{\sqrt{4+36+81}}=\frac{2}{11}=>\theta_1\simeq79.52^\circ$$

$$\cos\theta_2=\frac{-6}{|a|}=\frac{-6}{11}=>\theta_2\simeq123.06^\circ$$

$$\cos\theta_3=\frac{9}{|a|}=\frac{9}{11}=>\theta_3\simeq35.10^\circ$$

۱۳) $12i + 4j - 3k$

$$\cos\theta_1 = \frac{12}{|a|} = \frac{12}{\sqrt{144+16+9}} = \frac{12}{13} => \theta_1 \simeq 22.62°$$

$$\cos\theta_2 = \frac{4}{|a|} = \frac{4}{13} => \theta_2 \simeq 72.08°$$

$$\cos\theta_3 = \frac{-3}{|a|} = \frac{-3}{13} => \theta_3 \simeq 103.34°$$

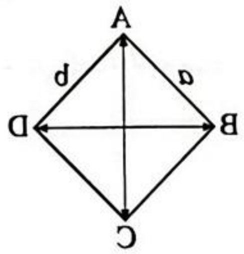
۱۴) $6i + 2j + 3k$

$$\cos\theta_1 = \frac{6}{|a|} = \frac{6}{\sqrt{36+40+9}} = \frac{6}{7} => \theta_1 \simeq 31.003°$$

$$\cos\theta_2 = \frac{2}{|a|} = \frac{2}{7} => \theta_2 \simeq 73.40°$$

$$\cos\theta_3 = \frac{3}{|a|} = \frac{3}{7} => \theta_3 \simeq 64.62°$$

۱۵)نشان دهید شرط لازم و کافی برای ان که یک متوازی الاضلاع لوزی باشد ان است که اقطارش بر هم عمود باشند.



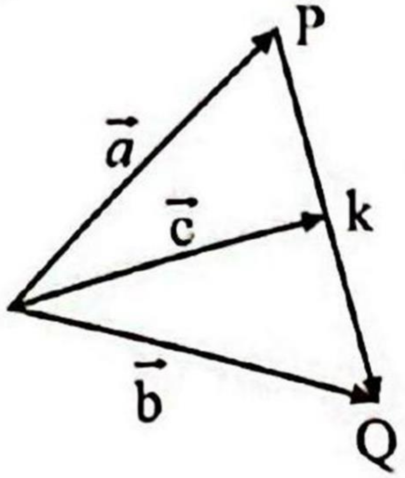
با توجه به لوزی زیر $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ و $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$$(\vec{a} . \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$=> (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) <=> \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$$

۱۶)نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد آن است که اقطارش یکدیگر را نصف کنند.

برای اثبات این قضیه ابتدا یک قضیه دیگر را که در اثبات ما مورد استفاده قرار خواهد گرفت ثابت می کنیم و صورت قضیه اخیر بدین صورت است که اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار بین مبدا و نقاط P و Q باشند آن گاه بردار $\vec{c}$ که بین مبدا و وسط پاره خط PQ واقع می شود برابر است با $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.



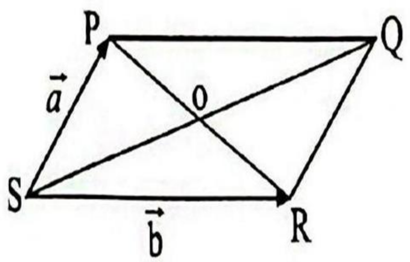
فرض: $|\overrightarrow{Pk}| = |\overrightarrow{kQ}|$

حکم: $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

اثبات: $2\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{Pk} + \overrightarrow{Qk}$ دو رابطه را با هم جمع می زنیم $\begin{matrix} \vec{c}=\vec{a}+\overrightarrow{Pk} \\ \vec{c}=\vec{b}+\overrightarrow{Qk} \end{matrix}$

چون $\overrightarrow{Qk}$و$\overrightarrow{Pk}$دو بردار با اندازهای برابر ولی در دو سوی مخالف هم هستند جمع برداری آن ها صفر می شود

بنابراین: $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$



حال سراغ اثبات قضیه اصلی می رویم:

فرض:چهار ضلعی PQRSمتوازی الاضلاع است

حکم: قطرها نصف یکدیگر هستند.

اثبات:می دانیم در متوازی الاضلاع قطر برابر جمع برداری دو ضلع غیر موازی است . پس

(۱) $SQ = \vec{a} + \vec{b}$

نقطه oرا وسط پاره خطPR در نظر می گیریم بنابراین طبق قضیه ای اثبات آن آمد داریم

(۲) $\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

از رابطه (1)و(2) نتیجه می گیریم که : $\overrightarrow{SQ}=\frac{1}{2}\ \overrightarrow{SQ}$ بنابراین قطرها یکدیگر رانصف می کنند.

۱۷)اگر $\vec{A}$و $\vec{B}$دو بردار عمود باشند ثابت کنید

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2$$

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2=(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

چون بردارهای $\vec{A}$و$\vec{B}$ بر هم عمود هستند لذا $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$می باشد.

۱۸)اگر $\vec{A}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$, $\vec{B}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{C}=3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ مقدار tرا طوری پیدا کنید که $\vec{A}+t\vec{B}$ بر بردار $\vec{C}$ عمود باشد.

$$\vec{A}+t\vec{B}=(1-t)\vec{\imath}+(2+2t)\vec{\jmath}+(3+t)\vec{k}$$

$$(\vec{A}+t\vec{B}).\vec{C}=3(1-t)+(2+2t)+0=0 \Rightarrow t=5$$

۱۹)بردار یکه ای موازی با صفحهxyپیدا کنید که بر بردار $4\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+\vec{k}$ عمود باشد.

$$\vec{U}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}\quad ,\sqrt{a^2+b^2}=1\quad ,\vec{A}=4\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+\vec{k}$$

$$\vec{A}.\vec{U}=4a-3b=0$$

$$\begin{cases}4a-3b=0 \Rightarrow b=\frac{4}{3}a\\ a^2+b^2=1 \Rightarrow a^2+\frac{16}{9}a^2=1 \Rightarrow 25a^2=9 \Rightarrow a=\pm\frac{3}{5}\end{cases}$$

$$a=-\frac{3}{5} \Rightarrow b=-\frac{4}{5}\quad ,\ \vec{U}=-\frac{3}{5}\vec{\imath}-\frac{4}{5}\vec{\jmath}$$

۲۰)نشانه دهید برای هر دو بردار دلخواهA و B

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2+|\vec{A}-\vec{B}|^2=2|\vec{A}|^2+2|\vec{B}|^2$$

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2+|\vec{A}-\vec{B}|^2=(A+B).(A+B)+(A-B).(A-B)$$

=A.A+۲A.B+B.B+A.A-۲A.B+B.B

=۲$|\vec{A}|^2$+۲$|\vec{B}|^2$