

استادانه

محتوای خوب از ما، نهره خوب برای شما

حل المسائل کتاب ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت جلد ۲ مسعود نیکوکار

دوست عزیزم، خریدار محترم و خواننده گرامی

از اینکه این فایل رو خریداری کردی و داری ازش استفاده میکنی متشکرم، اما اگه بدون اینکه فایل رو خریداری کنی داری ازش استفاده میکنی اینو بدون که استادانه برای این فایل خیلی زحمت کشیده و اونو به صورت اختصاصی تولید کرده نه مثل خیلی از سایتها از دیگران کپی کنه برای همین اصلا راضی نیست ازش استفاده کنی!

اگه دوست داری ازش استفاده کنی همین الان به سایت استادانه به آدرس زیر برو و مبلغش رو پرداخت کن و با خیال راحت ازش استفاده کن، کافیه اسم فایل رو داخل سایت سرچ کنی و اونو بخری

www.OSTADANEH.com



توجه توجه

فهرست مطالب

- فصل اول بردارها..... ۳
- مجموعه مسائل ۱.۱: مختصات قائم در فضا..... ۳
- مجموعه مسائل ۲.۱: بردارها در فضای سه بعدی..... ۴
- مجموعه مسائل ۳.۱: حاصل ضرب داخلی یا عددی..... ۵
- مجموعه مسائل ۴.۱: حاصل ضرب خارجی (بردار) دو بردار..... ۱۰
- فصل دوم: جبر ماتریس دترمینان و معکوس ماتریس..... ۱۹
- مجموعه مسائل ۱.۲: ماتریس..... ۱۹
- مجموعه مسائل ۲.۲: دترمینان..... ۲۵
- مجموعه مسائل ۳.۲: ماتریس معکوس یک ماتریکس..... ۲۹
- مجموعه مسائل ۴.۲: استقلال خطی وابستگی خطی و رتبه ماتریس..... ۳۳
- فصل سوم: دستگاه معادلات خطی..... ۳۵
- مجموعه مسائل ۱.۳: دستگاه معادلات خطی n معادله n مجهولی..... ۳۵
- مجموعه مسائل ۲.۳: دستور کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی n معادله..... ۳۹
- مجموعه مسائل ۳.۳: محاسبه معکوس ماتریس با استفاده از عملیات مقدماتی سطری و ستونی..... ۴۳
- مجموعه مسائل ۴.۳: دستگاه معادلات خطی معادله مجهولی..... ۴۷
- مجموعه مسائل ۵.۳: تبدیلات خطی و ماتریسی (مقادیر ویژه و بردار ویژه)..... ۵۱
- فصل چهارم: توابع چندمتغیره مشتقات جزئی..... ۵۹
- مجموعه مسائل ۱.۴: توابع چند متغیره..... ۵۹

- مجموعه مسائل ۲.۴: حد و پیوستگی ۶۰
- مجموعه مسائل ۳.۴: مشتقات جزئی یا نسبی ۶۴
- مجموعه مسائل ۴.۴: دیفرانسیل تابع دو متغیره ۷۳
- مجموعه مسائل ۵.۴: قاعده زنجیره ای ۷۴
- مجموعه مسائل ۶.۴: مشتقات ضمنی و قضیه اویلر ۷۸
- مجموعه مسائل ۷.۴: کاربرد مشتق جزئی در علم بازرگانی و اقتصاد ۸۲
- فصل پنجم: کاربردهای مشتقات جزئی ماکسیمم و مینیمم ۸۷
- مجموعه مسائل ۱.۵: ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیره ۸۷
- مجموعه مسائل ۲.۵: ماکسیمم و مینیمم مشروط ۹۹
- فصل ششم: انتگرال و روش های انتگرال گیری ۱۰۷
- مجموعه مسائل ۲.۶: انتگرال نامعین ۱۰۷
- مجموعه مسائل ۱.۴.۶: روش تغییر متغیر ۱۱۲
- مجموعه مسائل ۲.۴.۶: روش جزء به جزء ۱۱۹
- مجموعه مسائل ۳.۴.۶: انتگرال گیری به کمک توابع مثلثاتی ۱۲۴
- مجموعه مسائل ۴.۴.۶: انتگرال گیری از توابع گویا ۱۲۹
- مجموعه مسائل ۵.۶: روش های محاسبه تقریبی انتگرال معین ۱۴۰
- فصل هفتم: کاربرد انتگرال معین ۱۴۵
- مجموعه مسائل ۱.۷: مساحت یک ناحیه در صفحه ۱۴۵
- مجموعه مسائل ۲.۷: محاسبه حجم یک جسم دوار ۱۵۰
- فصل هشتم: معادلات دیفرانسیل معمولی ۱۶۰
- مجموعه مسائل ۱.۸: تعاریف و کلیات ۱۶۰
- مجموعه مسائل ۱.۲.۸: معادلات تفکیک پذیر (متغیرهای از هم جدا) ۱۶۱
- مجموعه مسائل ۲.۲.۸: معادلات همگن ۱۶۵
- مجموعه مسائل ۳.۲.۸: معادلات دیفرانسیل کامل ۱۷۲
- مجموعه مسائل ۴.۲.۸: فاکتورهای انتگرال گیری ۱۷۷
- مجموعه مسائل ۵.۲.۸: معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول ۱۸۴
- فصل نهم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ۱۹۲
- مجموعه مسائل ۱.۹: معادلات خطی مرتبه دوم ۱۹۲
- مجموعه مسائل ۲.۹: معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت ۱۹۳
- مجموعه مسائل ۳.۹: معادلات خطی غیر همگن مرتبه دوم ۱۹۵
- مجموعه مسائل ۴.۹: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم قابل تبدیل به مرتبه اول ۱۹۹

فصل اول بردارها

مجموعه مسائل ۱.۱: مختصات قائم در فضا

در هریک از تمرین های زیر فاصله نقاط داده شده را به دست آورید.

۱) $A(2,1)$, $B(4,3)$

با استفاده از فرمول $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ داریم:

$$|AB| = \sqrt{(2 - 4)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

۲) $A(3,5)$, $B(0,1)$

$$|AB| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

۳) $A(2,1,4)$, $O(0,0,0)$

$$|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

۴) $A(-1,2,-3)$, $B(7,1,6)$

$$|AB| = \sqrt{(-1 - 7)^2 + (2 - 1)^2 + (-3 - 6)^2} = \sqrt{64 + 1 + 81} = \sqrt{146}$$

۵) مختصات نقطه C وسط پاره خط AB که $A(2,1,4)$ و $B(0,1,2)$ را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{2}(2 + 0) = 1 \\ y_c = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \\ z_c = \frac{1}{2}(4 + 2) = 3 \end{cases} \Rightarrow C = (1,1,3)$$

مجموعه مسائل ۲.۱: بردارها در فضای سه بعدی

در تمرین های (۱) تا (۳) بردار \overrightarrow{AB} را به صورت $b\vec{i} + \vec{j} + c\vec{k}$ بنویسید.

$$(1) \quad B(4, -1, 2) \quad A(2, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (2, -1, 1) \text{ داریم (۱)}$$

$$\text{و با توجه به فرمول (۲) داریم: } \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$(2) \quad B(1, -1, 2) \quad A(0, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1, -1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$(3) \quad B(4, 1, 2) \quad A(-1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (5, -1, -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

در تمرین های ۴ و ۵ بردارهای $\vec{A} + 3\vec{B}$ و $\vec{A} - 2\vec{B}$ را پیدا کنید.

$$(4) \quad \vec{B} = 2\vec{i} - \vec{k}, \vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A} - 2\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} - 2(2\vec{i} - \vec{k}) = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{A} + 3\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} + 3(2\vec{i} - \vec{k}) = 9\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(5) \quad \vec{B} = 2\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{A} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{A} + 3\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} + 3(2\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}) = 5\vec{i} + 22\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{A} - 2\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - 2(2\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}) = -5\vec{i} - 13\vec{j} + 5\vec{k}$$

(۶) طول بردارهای زیر را پیدا کنید.

$$\text{الف: } \vec{A} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$|4\vec{i} - 3\vec{j}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\text{ب: } \vec{B} = 5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$|5\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

مجموعه مسائل ۳.۱: حاصل ضرب داخلی یا عددی

در تمرین های زیر زاویه بین بردارهای داده شده را معین کنید.

$$\vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \quad , \vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \quad (۱)$$

$$\cos \theta = \frac{3 \times 1 + 2 \times 1 + 7 \times 5}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{40}{\sqrt{1770}} = 0.95$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} 0.95 = 18.05^\circ$$

$$\vec{B} = 3\vec{i} - 3\vec{j} \quad , \vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad (۲)$$

$$\cos \theta = \frac{3 \times 2 + (-3 \times -1) + (0 \times 2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{9} \cdot 3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad , \vec{A} = \vec{j} - \vec{k} \quad (۳)$$

$$\cos \theta = \frac{2 \times 0 - 1 \times 1 + (1 \times -1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

در تمرینهای ۴ تا ۶ نشان دهید که دو بردار داده شده بر هم عمود هستند.

$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad , \vec{A} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 13\vec{k} \quad (۴)$$

کافی است نشان دهیم که $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ پس با توجه به

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \times 3 + 1 \times 7 + 1 \times -13 = 13 - 13 = 0 \quad \text{در نتیجه } \vec{A} \text{ و } \vec{B} \text{ بر هم عمودند.}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \quad , \vec{A} = 20\vec{i} + 29\vec{j} - 11\vec{k} \quad (۵)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \times 20 + (-1 \times 29) + (-11 \times -1) = 40 - 40 = 0$$

$$\vec{B} = 3\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k} \quad , \vec{A} = 20\vec{i} + 29\vec{j} - 11\vec{k} \quad (۶)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \times 20 + (-7 \times 29) + (-13 \times -11) = -203 - 203 = 0$$

در تمرین های ۷ تا ۱۱ تصویر بردار \vec{A} را روی \vec{B} پیدا کنید.

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \vec{A} = \vec{i} \quad (۷)$$

$$Proj_B^A = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} = \frac{2 \times 1 + 0 + 0}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= \frac{2}{9} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{2}{9}\vec{j} + \frac{4}{9}\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \vec{A} = \vec{j} \quad (8)$$

$$Proj_B^A = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} = \frac{2 \times 0 + (-1 \times 1) + 2 \times 0}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= -\frac{1}{9} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = -\frac{2}{9}\vec{i} + \frac{1}{9}\vec{j} - \frac{2}{9}\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \vec{A} = \vec{k} \quad (9)$$

$$Proj_B^A = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} = \frac{2 \times 0 + (-1 \times 0) + 2 \times 1}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= \frac{2}{9} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{2}{9}\vec{j} + \frac{4}{9}\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \vec{A} = \vec{i} + \vec{j} \quad (10)$$

$$Proj_B^A = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} = \frac{2 \times 1 + (-1 \times 1) + 2 \times 0}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= \frac{1}{9} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{2}{9}\vec{i} - \frac{1}{9}\vec{j} + \frac{2}{9}\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \vec{A} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad (11)$$

$$Proj_B^A = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B} = \frac{(2 \times -1) + (-1 \times 2) + 2 \times 3}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= \frac{2}{9} (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{2}{9}\vec{j} + \frac{4}{9}\vec{k}$$

کسینوس های هادی و زوایای هادی بردار داده شده را بیابید.

$$2\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k} \quad (12)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{2}{|a|} = \frac{2}{\sqrt{4+36+81}} = \frac{2}{11} \Rightarrow \theta_1 \approx 79.52^\circ$$

$$\cos \theta_2 = \frac{-6}{|a|} = \frac{-6}{11} \Rightarrow \theta_2 \approx 123.06^\circ$$

$$\cos \theta_3 = \frac{9}{|a|} = \frac{9}{11} \Rightarrow \theta_3 \approx 35.10^\circ$$

$$12i + 4j - 3k \quad (13)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{12}{|a|} = \frac{12}{\sqrt{144+16+9}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \theta_1 \approx 22.62^\circ$$

$$\cos \theta_2 = \frac{4}{|a|} = \frac{4}{13} \Rightarrow \theta_2 \approx 72.08^\circ$$

$$\cos \theta_3 = \frac{-3}{|a|} = \frac{-3}{13} \Rightarrow \theta_3 \approx 103.34^\circ$$

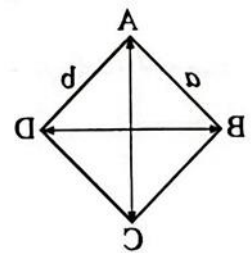
$$6i + 2j + 3k \quad (14)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{6}{|a|} = \frac{6}{\sqrt{36+40+9}} = \frac{6}{7} \Rightarrow \theta_1 \approx 31.003^\circ$$

$$\cos \theta_2 = \frac{2}{|a|} = \frac{2}{7} \Rightarrow \theta_2 \approx 73.40^\circ$$

$$\cos \theta_3 = \frac{3}{|a|} = \frac{3}{7} \Rightarrow \theta_3 \approx 64.62^\circ$$

۱۵) نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که یک متوازی الاضلاع لوزی باشد آن است که اقطارش بر هم عمود باشند.



با توجه به لوزی زیر $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ و $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{BD} = \vec{a} - \vec{b}$

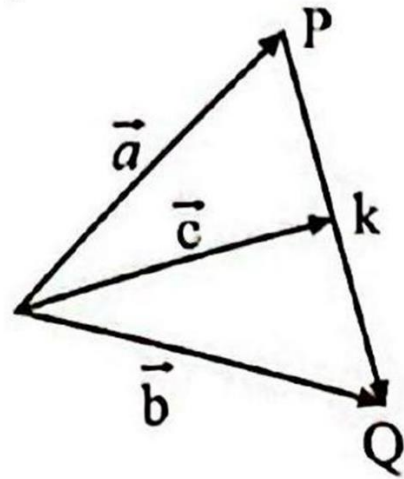
$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow \vec{BD} \perp \vec{AC}$$

۱۶) نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد آن است که اقطارش یکدیگر را نصف کنند.

برای اثبات این قضیه ابتدا یک قضیه دیگر را که در اثبات ما مورد استفاده قرار خواهد گرفت ثابت می کنیم و صورت قضیه اخیر بدین صورت است که اگر \vec{a} و \vec{b} دو بردار بین مبدا و نقاط P و Q باشند آن گاه بردار \vec{C} که

بین مبدا و وسط پاره خط PQ واقع می شود برابر است با $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$



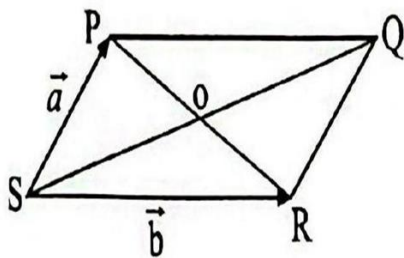
فرض: $|\overrightarrow{Pk}| = |\overrightarrow{kQ}|$

حکم: $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

اثبات: $2\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{Pk} + \overrightarrow{Qk}$ دو رابطه را با هم جمع می‌زنیم $\vec{c} = \vec{a} + \overrightarrow{Pk}$
 $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{Qk}$

چون \overrightarrow{Pk} و \overrightarrow{Qk} دو بردار با اندازه‌های برابر ولی در دو سوی مخالف هم هستند جمع برداری آن‌ها صفر می‌شود

بنابراین: $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$



حال سراغ اثبات قضیه اصلی می‌رویم:

فرض: چهار ضلعی PQRS متوازی الاضلاع است

حکم: قطرهای آن نصف یکدیگر هستند.

اثبات: می‌دانیم در متوازی الاضلاع قطر برابر جمع برداری دو ضلع غیر موازی است. پس

$$(1) \overrightarrow{SQ} = \vec{a} + \vec{b}$$

نقطه O را وسط پاره خط PR در نظر می‌گیریم بنابراین طبق قضیه ای اثبات آن آمد داریم

$$(2) \overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

از رابطه (1) و (2) نتیجه می گیریم که : $\vec{SQ} = \frac{1}{2} \vec{SQ}$ بنابراین قطرهای یکدیگر را نصف می کنند.

(۱۷) اگر \vec{A} و \vec{B} دو بردار عمود باشند ثابت کنید

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2$$

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

چون بردارهای \vec{A} و \vec{B} بر هم عمود هستند لذا $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ می باشد.

(۱۸) اگر $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{C} = 3\vec{i} + \vec{j}$ مقدار t را طوری پیدا کنید که $\vec{A} + t\vec{B}$ بر بردار \vec{C} عمود باشد.

$$\vec{A} + t\vec{B} = (1-t)\vec{i} + (2+2t)\vec{j} + (3+t)\vec{k}$$

$$(\vec{A} + t\vec{B}) \cdot \vec{C} = 3(1-t) + (2+2t) + 0 = 0 \Rightarrow t = 5$$

(۱۹) بردار \vec{A} یکه ای موازی با صفحه xy پیدا کنید که بر بردار $\vec{A} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ عمود باشد.

$$\vec{U} = a\vec{i} + b\vec{j} , \sqrt{a^2 + b^2} = 1 , \vec{A} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{U} = 4a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{4}{3}a \\ a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 1 \Rightarrow 25a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$a = -\frac{3}{5} \Rightarrow b = -\frac{4}{5} , \vec{U} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

(۲۰) نشانه دهید برای هر دو بردار دلخواه \vec{A} و \vec{B}

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 + |\vec{A} - \vec{B}|^2 = 2|\vec{A}|^2 + 2|\vec{B}|^2$$

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 + |\vec{A} - \vec{B}|^2 = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$$

$$= \vec{A} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{A} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

$$= 2|\vec{A}|^2 + 2|\vec{B}|^2$$