

استادانه

محتوای خوب از ما، نهره خوب برای شما

حل المسائل کتاب ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت جلد ۱ مسعود نیکوکار

دوست عزیزم، خریدار محترم و خواننده گرامی

از اینکه این فایل رو خریداری کردی و داری ازش استفاده میکنی متشکرم، اما اگه بدون اینکه فایل رو خریداری کنی داری ازش استفاده میکنی اینو بدون که استادانه برای این فایل خیلی زحمت کشیده و اونو به صورت اختصاصی تولید کرده نه مثل خیلی از سایتها از دیگران کپی کنه برای همین اصلا راضی نیست ازش استفاده کنی!

اگه دوست داری ازش استفاده کنی همین الان به سایت استادانه به آدرس زیر برو و مبلغش رو پرداخت کن و با خیال راحت ازش استفاده کن، کافیه اسم فایل رو داخل سایت سرچ کنی و اونو بخری

www.OSTADANEH.com



توجه توجه

فهرست مطالب

فصل اول	۴
مجموعه مسائل ۱.۱ مفهوم مجموعه	۴
مسائل ۲.۱ زیر مجموعه های یک مجموعه	۵
مجموعه مسائل ۳.۱ مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه	۷
مجموعه مسائل ۴.۱: جبر مجموعه ها	۸
مجموعه مسائل ۵.۱: حاصلضرب دکارتی	۱۲
فصل دوم	۱۵
مجموعه مسائل ۱.۲: مجموعه اعداد طبیعی . گویا. اصمو حقیقی	۱۵
مجموعه مسائل ۲.۲: مجموعه اعداد مختلط	۱۷
مجموعه مسائل ۲.۲.۲ : نمایش هندسی اعداد مختلط	۱۹
فصل سوم: بحث های حاشیه ای	۲۱
مجموعه مسائل ۱.۳ مفهوم قدر مطلق و فاصله	۲۱
مجموعه مسائل ۱.۳.۳ : اصل شمارش	۲۴
مجموعه مسائل ۲.۳.۳: تبدیل	۲۶
مجموعه مسائل ۳.۳.۳: ترتیب	۲۷
مجموعه مسائل ۴.۳.۳: ترکیب	۲۸
مجموعه مسائل ۴.۳: بسط دو جمله ای	۳۱

۳۴	مجموعه مسائل ۲.۵.۳: روش اسقرار ریاضی
۳۷	مجموعه مسائل ۱.۶.۳: مختصات نقاط در دستگاه مختصات دکارتی
۴۱	مجموعه مسائل ۲.۶.۳: معادله خط مستقیم
۵۰	مجموعه مسائل ۳.۶.۳: کاربرد خط در علم بازرگانی و اقتصاد
۵۲	مجموعه مسائل ۴.۶.۳: دستگاه مختصات قطبی
۵۶	فصل چهارم
۵۶	مجموعه مسائل ۱.۴: مفهوم تابع
۵۹	مجموعه مسائل ۳.۴: تابع های چند ضابطه ای
۷۲	مجموعه مسائل ۴.۴: تساوی دو تابع
۷۳	مجموعه مسائل ۵.۴: اعمال روی توابع (جبر توابع)
۷۹	مجموعه مسائل ۶.۴: تابع زوج و فرد
۸۱	مجموعه مسائل ۷.۴: تابع پوششی یا پوشا
۸۳	مجموعه مسائل ۸.۴: تابع یک به یک
۸۵	مجموعه مسائل ۹.۴: توابع صعودی و نزولی
۸۷	مجموعه مسائل ۱۰.۴: تابع معکوس
۸۹	مجموعه مسائل ۱۱.۴: توابع نمایی
۹۰	مجموعه مسائل ۱۲.۴: تابع لگاریتمی
۹۳	مجموعه مسائل ۱۳.۴: توابع مثلثاتی
۱۰۰	مجموعه مسائل ۱۴.۴: رسم توابع مثلثاتی
۱۰۲	مجموعه مسائل ۱۵.۴: توابع معکوس مثلثاتی
۱۰۵	فصل پنجم: حد و پیوستگی
۱۰۵	مجموعه مسائل ۱.۵: حد توابع
۱۱۳	مجموعه مسائل ۲.۵: حدهای بی نهایت (نامتناهی)
۱۱۵	مجموعه مسائل ۳.۵: حد در بی نهایت
۱۱۸	مجموعه مسائل ۱.۴.۵: پیوستگی تابع در یک نقطه
۱۲۱	مجموعه مسائل ۲.۴.۵: قضایای پیوستگی
۱۲۶	فصل ششم: مشتق
۱۲۶	مجموعه مسائل ۱.۶: مشتق
۱۲۷	مجموعه مسائل ۲.۶: مشتق پذیری و رابطه ان با پیوستگی
۱۲۹	مجموعه مسائل ۳.۶: قضایای مشتق
۱۳۲	مجموعه مسائل ۴.۶: مشتق توابع مثلثاتی
۱۳۳	مجموعه مسائل ۵.۶: مشتق مراتب بالاتر
۱۳۴	مجموعه مسائل ۶.۶: مشتق گیری ضمنی

- مجموعه مسائل ۷.۶: مشتق توابع لگاریتمی و نمایی ۱۳۵
- مجموعه مسائل ۸.۶: مشتق توابع معکوس مثلثاتی ۱۳۸
- مجموعه مسائل ۹.۶: دیفرانسیل ۱۳۹
- فصل هفتم: کاربرد مشتق و دیفرانسیل ۱۴۱
- مجموعه مسائل ۱.۷: معادله ی خط مماس و قائم بر یک منحنی ۱۴۱
- مجموعه مسائل ۲.۷: تعیین جهت تغییرات تابع ۱۴۳
- مجموعه مسائل ۳.۷: ماکسیمم و مینیمم نسبی و مطلق ۱۴۵
- مجموعه مسائل ۴.۷: تقعر و نقاط عطف یک منحنی ۱۵۱
- مجموعه مسائل ۵.۷: رسم نمودار تابع ۱۵۵
- مجموعه مسائل ۱.۶.۷: صورت های مبهم ۱۶۴
- مجموعه مسائل ۲.۶.۷: صورت های مبهم ۱۶۷
- مجموعه مسائل ۷.۷: کاربرد مشتق در علم بازرگانی و اقتصاد ۱۷۰

فصل اول

مجموعه مسائل ۱.۱ مفهوم مجموعه

(۱) کدام یک از توصیف های زیر مجموعه را مشخص میسازد.

(الف) اعداد طبیعی کوچکتر از ۲۵

$$\{1, 2, 3, \dots, 24\}$$

(ب) مردان باهوش تهران.

چون معیاری برای باهوش بودن در دست نداریم بنابراین مردان باهوش تهران نمیتواند توصیف یک مجموعه باشد.

(پ) شعرای معروف ایران

چون معیاری برای شعرای معروف در دست نداریم بنابراین توصیفی برای مجموعه نداریم.

(ت) انسان های خوشبخت ایران.

به همان دلیل بالا مجموعه ای را توصیف نمیکند

(ث) اعداد طبیعی مضرب ۷

$$\{7, 14, 21, \dots\}$$

(ج) دانشجویان یک دانشگاه

چون دانشجویان یک دانشگاه معلوم و مشخص هستند بنابراین تشکیل یک مجموعه میدهند

(۲) مجموعه های زیر را که با بیان «خاصیتی معین» مشخص شده اند یک بار با نام بردن اعضا و یک بار با علائم ریاضی نشان دهید.

(الف) مجموعه اعداد طبیعی فرد بین ۱ و ۱۰

$$A = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$A = \{x \mid 1 < x < 10 \text{ و } x \text{ عدد طبیعی فرد است}\}$$

(ب) مجموعه اعداد طبیعی بین ۱ و ۵۰ که مربع کامل باشند.

$$B = \{4, 9, 16, 25, 36, 49\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک عدد طبیعی مربع کامل کوچکتر از } 50 \text{ و بزرگتر از } 1 \text{ است}\}$$

(پ) مجموعه ماه های پاییز

$$C = \{\text{مهر، آبان، آذر}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ یک ماه پاییز است}\}$$

(۳) مجموعه های زیر که به طریق نام بردن اعضا بیان شده است را با علائم ریاضی نمایش دهید.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \text{ (الف)}$$

$$A = \{x \mid x \text{ یک عدد فرد طبیعی است}\}$$

(ب) مجموعه B مجموعه اعداد اول می باشد.

$$B = \{x \mid x \text{ یک عدد اول است}\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \text{ (پ)}$$

$C = \{x: 15 \text{ و بزرگتر از } 1\}$

۴) مجموعه های زیر که با علائم ریاضی مشخص شده اند را با نوشتن عضوهایشان دهید.

الف) $A = \{x; x \in N, 2x - 10 = 0\}$

$A = \{5\}$ $2x - 10 = 0 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$ در نتیجه

ب) $B = \{x; x \in N, x - 1 < 4\}$

$x - 1 < 4 \rightarrow x < 4 + 1 \rightarrow x < 5$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

پ) $C = \{x; x \in N, x^2 - 25 = 0\}$

$x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5 \quad x = \{5\}$

ت) $D = \{x; x \in N, x - 1 > 8\}$

$x - 1 > 8 \rightarrow x > 8 + 1 \rightarrow x > 9$

$D = \{10, 11, 12, 13, \dots\}$

ث) $E = \{x; x \in N, 4x^2 - 16 = 0\}$

$4x^2 - 16 = 0 \rightarrow 4x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$E = \{2\}$

۵) اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ کدام یک از گزینه های زیر درست است.

$2 \in A, 3 \in A, 6 \notin A, 7 \in A, 8 \notin A, 8 \in A$

$2 \in A$ درست است چون ۲ در مجموعه ش قرار دارد

غلط است چون ۳ در مجموعه A قرار ندارد $3 \notin A$

غلط است چون ۶ به A متعلق است $6 \in A$

غلط است چون ۷ به A متعلق نیست $7 \notin A$

غلط است چون ۸ به A متعلق است $8 \in A$

درست است چون ۸ به A متعلق است $8 \in A$

مسائل ۲.۱ زیر مجموعه های یک مجموعه

۱) مفاهیم زیر با استفاده از نمادهای \in و \notin و \subseteq و $\not\subseteq$ نشان دهید.

الف. a متعلق به A است.

ب. A زیر مجموعه E است.

پ. A زیر مجموعه B نیست.

ت. b عضوی از B نیست.

ث. در A عضوی وجود دارد که در F نیست.

الف. $a \in A$

ب. $A \subseteq E$

پ. $A \not\subseteq B$

ت. $b \notin B$

ث. $A \not\subseteq F$

۲) مجموعه های $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $G = \{2, 4\}$ و $F = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ مفروض اند کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست است.

الف. $F \subseteq E$

ب. $G \subseteq F$

پ. $F \subseteq F$

ت. $G \subseteq F \subseteq E$

ث. $2 \subseteq F$

ج. $F \not\subseteq G$

چ. $5 \notin E$

ح. $3 \notin G$

الف. چون همه اعضای F در E نیستند بنابراین $F \subseteq E$ لذا گزاره غلط است.

ب. چون همه اعضای G در F هستند بنابراین $G \subseteq F$ و گزاره درست است.

پ. هر مجموعه زیر مجموعه خودش می باشد. $F \subseteq F$

ت. چون $F \not\subseteq E$ بنابراین $G \subseteq F \subseteq E$ نمی تواند درست باشد چون برای درستی آن باید هر دو گزاره و درست باشد که اینطور نیست.

ث. چون ۲ یک مجکوعه نیست بنابراین نمی تواند زیر مجموعه F باشد و گزاره درست نیست.

ج. چون ۸ در F است ولی در G نیست بنابراین $F \not\subseteq G$ و گزاره درست است.

چ. چون ۵ مجموعه نیست بنابراین زیر مجموعه E نمی باشد یعنی گزاره $5 \notin E$ درست است.

ح. بنا به دلیل (قسمت ج) گزاره درست است.

۳) مجموعه $A = \{x; x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 9\}$ مفروض است. مجموعه های زیر را بنویسید.

الف. زیر مجموعه ای از A که عضوهای آن زوج باشد.

ب. زیر مجموعه از A که عضوهای آن فرد باشد.

پ. زیر مجموعه ای از A که عضوهای آن بزرگتر باشند.

ت. زیر مجموعه ای از A که عضوهای آن مربع کامل باشند.

ث. زیر مجموعه ای از A که عضوهای آن اعداد اول باشند.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

الف. $\{2, 4, 6, 8\}$

ب. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

پ. چون هیچ عضوی از ۹ بزرگتر نمی باشد بنابراین این زیر مجموعه تهی است.

ت. $3^2 = 9$ $2^2 = 4$ $1^2 = 1$ $\{1, 4, 9\}$

ث. $\{2, 3, 5, 7\}$

۴) اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ مجموعه توانی A را بنویسید این مجموعه دارای چند عضو است؟
در واقع باید تمام زیر مجموعه های A شامل تهی و خود A زیر مجموعه های یک عضو زیر مجموعه های دو
عضوی و زیر مجموعه های سه عضوی را مشخص کنیم.

$$P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$$

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, A\}$$

$$2^4 = 16$$

۵) مجموعه های مساوی با مجموعه های زیر را بنویسید.

الف. $A = \{x; x \in \mathbb{N}, 4x - 8 = 0\}$

$$4x - 8 = 0 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2 \quad \text{بنابراین } A = \{2\}$$

ب. $B = \{x; x \in \mathbb{N}, 3 < x < 4\}$

چون هیچ عدد طبیعی بین ۳ و ۴ وجود ندارد بنابراین مجموعه B تهی است.

پ. $C = \{x; x \in \mathbb{N}, x^2 - 4 = 0\}$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

چون $x \in \mathbb{N}$ بنابراین $x = \pm 2$ به C متعلق است $C = \{2\}$

مجموعه مسائل ۱.۳ مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

۱) کدام یک از مجموعه های A و B داده شده جدا از هم هستند.

الف) $A = \{1, 4, 7\}$, $B = \{3\}$

$A \cap B = \{3\} \cup \{1, 4, 7\} = \emptyset$ بنابراین A و B جدا از هم هستند.

ب. $A = \{5, 3, 12\}$, $B = \{3, 7, 10\}$

چون اشتراک A و B غیر تهی است پس A و B از هم جدا نمی باشند.

پ. $A = \{x; x \in \mathbb{N}, x > 4\}$, $B = \{7, 8\}$

$A = \{5, 6, 7, \dots\}$ و $B = \{7, 8\}$ اشتراک A و B می شود و چون این اشتراک غیر تهی است

پس A و B [NH HC IL KLD FHAKN.

۲) اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ متمم مجموعه های داده شده را بنویسید.

الف. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

متمم مجموعه A یعنی اعدادی که در U هستند ولی در A نیستند. $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

ب. $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

متمم B عضوهای U می باشند که در B نیستند یعنی اعداد فرد در U .

$$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

پ. $C = \{\}$

چون C تهی است و متمم مجموعه تهی برابر U است

$$C' = U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

ت. $D = \{1, 4, 7\}$

تمام اعداد U که مخالف ۱ و ۴ و ۷ باشند تشکیل متمرجمجموعه D را میدهند.

$$D' = \{2,3,5,6,8,9,10\}$$

$$E=U.$$

چون متمرجمجموعه مرجع تهی است بنابراین

$$E' = U' = \emptyset$$

$$F = \{0,2,4\}.$$

چون F زیر مجموعه U نامی باشد لذا نمی توان متمرجمجموعه F را نسبت به U محاسبه کرد.

۳) برای هریک از مجموعه های زیر یک مجموعه مرجع مثال بنویسید و سپس متمرجمجموعه داده شده را بنویسید.

الف) مجموعه دانش آموزان شهر تهران

مجموعه دانش آموزان ایران و متمرجم آن مجموعه دانش آموزان ایران که در تهران نباشند می باشد.

ب. مجموعه کارکنان وزارت معادن و فلزات

مجموعه کارکنان دولت و متمرجم آن مجموعه کارکنان دولت که کارمند وزارت معادن و فلزات نباشند.

پ. مجموعه افرادی که سن آن ها از ۴۰ سال بیشتر است.

مجموعه کل انسان ها و متمرجم آن مجموعه انسان هایی که سن آن ها کمتر یا مساوی ۴۰ سال است.

مجموعه مسائل ۴.۱: جبر مجموعه ها

۱) اگر مجموعه مرجع $U = \{1,2,3,\dots,7\}$ و $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,3,7\}$ مفروض باشد نشان دهید

$$(A \cap B) \cup A' = A'$$

$$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{1,3,7\} = \emptyset$$

$$(A \cap B) \cup A' = \emptyset \cup A' = A'$$

۲) اگر $U = \{1,2,3,\dots,8\}$ و $A = \{1,4,5\}$ و $B = \{2,4,6\}$ مطلوب است

الف. $A \cup B$

$$A \cup B = \{1,2,4,5,6\}$$

ب. $A' \cup B'$

$$A' = \{2,3,6,7,8\} \quad \text{و} \quad B' = \{1,3,5,7,8\}$$

$$A' \cup B' = \{2,3,6,7,8\} \cup \{1,3,5,7,8\} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$$

پ. $A' \cap B'$

$$A' \cap B' = \{2,3,6,7,8\} \cap \{1,3,5,7,8\} = \{3,7,8\}.$$

۳) اگر $U = \{1,2,3,\dots,9\}$ و $A = \{1,5\}$ و $B = \{1,3,7\}$ و $C = \{2,3,6,8\}$ مطلوب است

الف. $A \cup B'$

$$A' = \{2,3,4,6,7,8,9\}$$

$$B' = \{2,4,5,6,8,9\}$$

$$A \cup B' = \{1,5\} \cup \{2,4,5,6,8,9\} = \{1,2,4,5,6,8,9\}$$

ب. $A' \cap B'$

$$A' \cap B = \{2,3,4,6,7,8,9\} \cap \{1,3,7\} = \{3,7\}$$

$$(A \cup B)'. \text{پ.}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = \{2,4,5,6,8,9\} \cap \{2,3,4,6,7,8,9\} = \{2,4,6,8,9\}$$

$$A' \cap B'. \text{ت.}$$

$$A' \cap B' = \{2,4,6,8,9\}.$$

$$(A \cap B)'. \text{ث.}$$

$$A \cap B = \{1,5\} \cap \{1,3,7\} = \{1\}$$

$$(A \cap B)' = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A' \cup B'. \text{ج.}$$

$$A' \cup B' = (A \cap B)' = \{2,3, \dots, 9\}$$

$$A \cap (B \cup C). \text{چ.}$$

$$B \cup C = \{1,3,7\} \cup \{2,3,6,8\} = \{1,2,3,6,7,8\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1,5\} \cap \{1,2,3,6,7,8\} = \{1\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C). \text{ح.}$$

طبق قسمت چ داریم

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$

$$= \{1\}$$

$$. A \cup (B \cap C) \text{خ.}$$

$$B \cap C = \{1,3,7\} \cap \{2,3,6,8\} = \{3\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1,5\} \cup \{3\} = \{1,5,3\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C). \text{د.}$$

طبق قسمت خ داریم

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C) = \{1,5,3\}$$

(۴) با مفروضات تمرین ۳ نشان دهید.

$$(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'. \text{الف.}$$

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,5,6,7,8\}$$

$$(A \cup B \cup C)' = \{4,9\} \quad \text{و} \quad A' = \{2,3,4,6,7,8,9\}$$

$$B' = \{2,4,5,6,8,9\} \quad , \quad C' = \{1,4,5,7,9\}$$

$$A' \cap B' \cap C' = \{4,9\}$$

$$(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$$

$$(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'. \text{ب.}$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$(A \cap B \cap C)' = U = \{1,2, \dots, 9\}$$

$$A' \cup B' \cup C' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = U$$

$$A \cap B' = \emptyset \text{ نشان دهید که اگر } A \subseteq B \text{ آن گاه}$$

اگر $A \subseteq B$ ان گاه $B' \subseteq A'$ بنابراین

$$B' \subseteq A' \rightarrow B' \cap A \subseteq A' \cap A = \emptyset$$

$$B' \cap A = \emptyset$$

۶) برای هر دو مجموعه دلخواه A و B نشان دهید.

$$A \cap B \subseteq A \cup B$$

می دانیم که $A \cap B \subseteq B$ و $A \cap B \subseteq A$ در نتیجه

$$A \cap B \subseteq A \cup B$$

۷) اگر $A \cap B = U$ نشان دهید که $A=U$ و $B=U$ است.

می دانیم که $A \subseteq U$ و $A \cap B = U$ نتیجه در $U \subseteq A$ می دانیم اگر $A \subseteq D$ و $D \subseteq A$ ان گاه $A=D$ بنابراین

$$U=A \text{ به همین دلیل چون } U=A \cap B \subseteq B \text{ و چون } B \subseteq U \text{ بنابراین } U=B$$

۸) نشان دهید $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

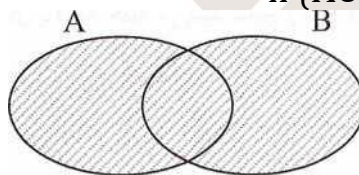
$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B')$$

از طرفی $B \cap B' = \emptyset$ بنابراین

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup \emptyset = A$$

۹) اگر $n(D)$ نشان دهنده تعداد عضوهای مجموعه D باشد با استفاده از نمودار ون نشان دهید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

۱۰) اگر تعداد عناصر مجموعه A و $(A \cap B)$ و $(A \cup B)$ به ترتیب برابر ۱۰ و ۴ و ۱۸ باشد تعداد عناصر

B را حساب کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$18 = 10 + n(B) - 4 \rightarrow n(B) = 12$$

۱۱) اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ نشان دهید.

الف. $A \cup B \subseteq C$

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$x \in A \cup B \rightarrow \begin{cases} x \in A \rightarrow x \in C \\ x \in B \rightarrow x \in C \end{cases} \text{ یا } x \in C$$

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in C \rightarrow A \cup B \subseteq C$$

ب. $A \cap B \subseteq C$

$$A \cap B \subseteq A \subseteq C \rightarrow A \cap B \subseteq C$$

۱۲) اگر $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$ نشان دهید

الف. $A \subseteq B \cup C$

$$A \subseteq B \subseteq B \cup C \rightarrow A \subseteq B \cup C$$

$$A \subseteq B \cap C.$$

$$x \in A \rightarrow x \in B \quad \text{و} \quad x \in C \rightarrow x \in B \cap C$$

$$x \in A \rightarrow x \in B \cap A \rightarrow A \subseteq B \cap C$$

(۱۳) اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند نشان دهید $A \cup B' = B'$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow B' \cup (A \cap B) = B' \cup \emptyset = B'$$

$$(B' \cup A) \cap (B' \cup B) = B'$$

$$(B' \cup A) \cap (U) = B' \rightarrow B' \cup A = B'$$

(۱۴) اگر مجموعه مرجع $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و A مجموعه اعداد فرد و B مجموعه اعداد بخش پذیر بر

۳ باشد مجموعه $(A-B)$ چند زیر مجموعه دارد؟

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

$$A-B = \{1, 5, 7\}$$

چون $A-B$ ، ۳ عضو دارد بنابراین $2^3 = 8$ زیر مجموعه دارد

(۱۵) نشان دهید $U-A = A'$

$$U-A = U \cap A' = A'$$

(۱۶) نشان دهید $A-B \subseteq A$

$$A-B = A \cap B' \subseteq A$$

(۱۷) آیا رابطه زیر صحیح است. $A-B = -(B-A)$

رابطه صحیح نیست و توجه کنید که اصولاً ضرب یک عدد در یک مجموعه را تعریف نکردیم.

(۱۸) نشان دهید $(A-B') \cup A = A$

$$A-B' = A \cap (B')' = A \cap B$$

$$(A \cap B) \cup A = A$$

(۱۹) اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند و داشته باشیم $A-B = B-A$ نشان دهید $A=B$

$$A-B = A \cap B', \quad B-A = B \cap A'$$

$$A \cap B' = B \cap A' \rightarrow A \cap B' - B \cap A' = \emptyset$$

$$(A \cap B') \cap (B \cap A')' = \emptyset$$

$$(A \cap B') \cap (B' \cup A) = A \cap B' = A-B = \emptyset \rightarrow A \subseteq B$$

$$A \subseteq B, \quad B \subseteq A \rightarrow A = B$$

(۲۰) نشان دهید $(A \cap B \cap (A-B))' = U$

$$A \cap B \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap A \cap B') = A \cap (A \cap B \cap B') = A \cap (A \cap \emptyset) = A \cap \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset' = U$$

(۲۱) نشان دهید $B-(A-B) = B$

$$B-(A-B) = B \cap (A-B)' = B \cap (A \cap B)' = B \cap (A' \cup B) = B (B \subseteq (B \cup A'))$$

(۲۲) نشان دهید $(A \cap B \cap (A-B)) \cup A = A$

$$A-B = A \cap B'$$

$$(A \cap B \cap (A \cap B')) \cup A = (A \cap A \cap B \cap B') \cup A = (A \cap \emptyset) \cup A = \emptyset \cup A = A$$

(۲۳) نشان دهد $(A-B) \cap A \cap B = \emptyset$

$$A-B = A \cap B'$$

$$(A-B) \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

(۲۴) اگر $A \subset B$ باشد نشان دهید $(A-B) \cap A = \emptyset$

$$A-B = A \cap B'$$

$$(A \cap B') \cap A = (A \cup B) \cap A = A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B = A$$

(۲۵) نشان دهید $(A' \cap B) \cup (A \cap B) = B$

$$(B \cap A) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \cap U = B$$

(۲۶) اگر $A = \{x; 1 \leq x < 3\}$ و $B = \{x; 2 \leq x < 5\}$ باشد و $A, B \subset N$ باشد چند عضو دارد

(N مجموعه اعداد طبیعی)؟

$$B = \{2, 3, 4\}, A = \{1, 2\} \rightarrow A - B = \{1\}$$

(۲۷) نشان دهید $(A \cap B) - B = \emptyset$

$$(A \cap B) - B = (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$$

مجموعه مسائل ۵.۱: حاصلضرب دکارتی

(۱) اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{a, e\}$ مطلوب است

الف. $A \times B$ ب. $B \times A$ پ. چند عضو دارد؟

ت. تعداد زیر مجموعه های $A \times B$ را تعیین کنید.

$$A \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, e), (c, a), (c, e), (d, a), (d, e)\}$$

$$B \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d)\}$$

پ. چون تعداد عضوهای A برابر ۴ و تعداد عضوهای مجموعه برابر ۲ است تعداد عضوهای مجموعه های

$$A \times B \text{ برابر } 4 \times 2 = 8 \text{ می باشد}$$

(۲) اگر $A = \{2k + 1; k \in N, 1 \leq k \leq 3\}$ و $B = \{x; x \in N, x^2 \leq 16\}$ مطلوب است:

الف. $A \times B$ ب. $B \times A$

$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\} \quad A = \{3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$= \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4)\}$$

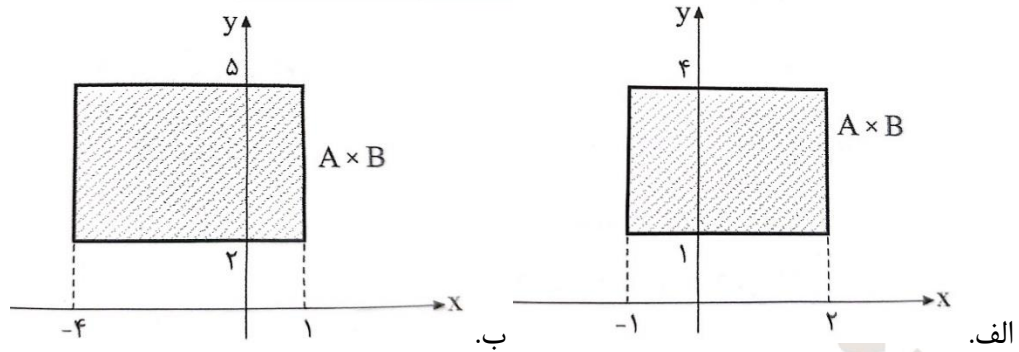
$$B \times A = \{(x, y) : x \in B, y \in A\}$$

$$\{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7)\}$$

(۳) حاصلضرب دکارتی هر یک از مجموعه های زیر را در دستگاه مختصات نشان دهید.

$$\text{الف. } A = \{x \in R; -1 \leq x \leq 2\} \text{ و } B = \{x \in R; 1 \leq x \leq 4\}$$

$$\text{ب. } A = [-4, 1] \text{ و } B = [2, 5]$$



۴) نشان دهید $A \times B = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ یا $A = \emptyset$

ابتدا فرض می کنیم $A \times B = \emptyset$ و نشان می دهیم $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ است اگر $A \neq \emptyset$ باشد چون $A \times B = \emptyset$ است بنابراین باید $B = \emptyset$ باشد و اگر $B \neq \emptyset$ باشد چون $A \times B = \emptyset$ است بنابراین باید $A = \emptyset$ باشد لذا اگر $A \times B = \emptyset$ باشد لافل یکی از مجموعه های A و B تهی است حال اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ باشد نشان می دهیم $A \times B = \emptyset$ است

اگر $A = \emptyset$ باشد

$$A = \emptyset \rightarrow A \times B = \emptyset \times B = \emptyset$$

اگر $B = \emptyset$ باشد

$$B = \emptyset$$

$$\rightarrow A \times B = A \times \emptyset = \emptyset$$

۵) نشان دهید.

$$C \neq \emptyset, A \times C = B \times C \rightarrow A = B$$

$$A \times C = B \times C \leftrightarrow \forall (x, y) \in A \times C \leftrightarrow x \in A, y \in C \leftrightarrow x \in B,$$

$$y \in C \leftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B \leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A \rightarrow A = B$$

۶) نشان دهید

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

$$, B = \{2, 4\} C = \{1\}, A = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$$

$$(A \times B) \times C = \{((1, 2)1), ((1, 4)1), ((2, 2)1), ((2, 4)1)\}$$

$$B \times C = \{(2, 1), (4, 1)\}$$

$$A \times (B \times C) = \{(1(2, 1)), (1(4, 1)), (2(4, 1))\}$$

روابط بالا مساوی نیستند

۷) نشان دهید.

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = \{(x, y) : x \in A \cap B, y \in C\}$$

$$= \{(x, y) : (x \in A, y \in B), y \in C\}$$

$$= \{(x, y) : (x \in A, y \in C), (x \in B, y \in C)\}$$

$$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times C, (x, y) \in B \times C\}$$

$$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)\}$$

$$= \{(A \times C) \cap (B \times C)\}$$

۸) نشان دهید $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$\begin{aligned}
 A \times (B \cup C) &= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cup C)\} \\
 &= \{(x, y) : x \in A, y \in B \text{ یا } y \in C\} = \\
 &= \{(x, y) : x \in A, y \in B\} \cup \{(x, y) : x \in A, y \in C\} = \\
 &= (A \times B) \cup (A \times C)
 \end{aligned}$$